Eine Kleinstadt wird untersucht auf Brillenträger

Folgende Statistik ergibt sich für 10 200 Einwohner mit 4 950 Männern

absolute Hfgkt	unter 50 Jahre (<50)	ab 50 Jahre (≥50)
Männer	620	1480
Frauen	580	1550

rel. H	unter 50	ab 50
Männer	6,08%	14,51%
Frauen	5,69%	15,19%

Antwort c) $\frac{36}{250} \approx 14{,}4\% \Rightarrow$ Männer ab 50

d) $\frac{55 \cdot 5{,}69}{100} \approx 3$ Frauen mit Brille

a) Bestimme die relativen Häufigkeiten bezogen auf alle Einwohner

rel. Hfgkt: Männer unter 50: $h = \frac{620}{10200} = 6{,}08\%$

b) Wie hoch ist der Prozentsatz der Brillenträger insgesamt?

c) In einer der Gruppen von 250 Personen werden 36 Brillenträger:innen gefunden. Welche Gruppe war es?

d) Eine Gruppe von 55 Frauen unter 50 macht eine Busreise. Wie viele Brillenträgerinnen sind zu erwarten?

erste gültige Ziffer

Runden

0,05686 4 gültige

0,0569 auf 3 Runden

5,69%

Binomialverteilung

Immer, wenn p gegeben ist und eine unabhängige Kette vorliegt.

Beispiel: Eine Gruppe von $\boxed{n=\overset{80}{150}}$ Männern unter 50. Die Wahrsch., einen Brillenträger auszuwählen, beträgt $\boxed{p=6\%}$ 9%

a) Wie groß ist die Wsch., genau $\overset{7}{10}$ Brillenträger unter den 150 zu finden?

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}}$$

$$P(X=\underline{10})=\binom{\overset{n}{150}}{\underset{k}{10}}\cdot \underset{p}{0{,}06}^{\overset{k}{10}}\cdot \underset{1-p}{0{,}94}^{\overset{n-k}{140}}$$

Taschenrechner

$\binom{n}{r}$: nCr oder Verteilung Bin-Dichte

$$\approx 0{,}1223$$

Die Wsch beträgt 12,23%

$$P(X=7)=\binom{80}{7}\cdot 0{,}09^{7}\cdot 0{,}91^{73}\approx 15{,}55$$

Die Wsch. beträgt 15,55%

b) Wie gross ist die Wsch., das bei 35 Personen höchsten 4 Personen mit Brille dabei sind, mit $p = 9\%$?

Kumul

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \sum_{i=0}^{4} P(X=i)$$

kumulative Bin. Vert

$n = 35;\ p = 0{,}09;\ k = 4$

$= (\text{Taschenrechner})\ 56{,}76\%$

c) Mindestens 3 Personen:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}3788 = 0{,}6212$$

Kum. Bin

$n = 35$

$p = 0{,}09$

$k = 2$

Mit 62,12 % findet man mindestens 3 Brillenträger

b) Wie gross ist die Wsch., das bei 35 Personen höchsten 4 Personen mit Brille dabei sind, mit $p = 9\%$?

Kumul

$$P(X\le 4) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = \sum_{i=0}^{4} P(X=i)$$

kumulative Bin. Vert

$n=35;\ p=0{,}09;\ k=4$

$$= \text{(Taschenrechner) } 56{,}76\%$$

c) Mindestens 3 Personen:

$$P(X\ge 3) = 1 - P(X<3) = 1 - P(X\le 2) = 1 - 0{,}3788 = 0{,}6212$$

Kum. Bin

$n=35$

$p=0{,}09$

$k=2$

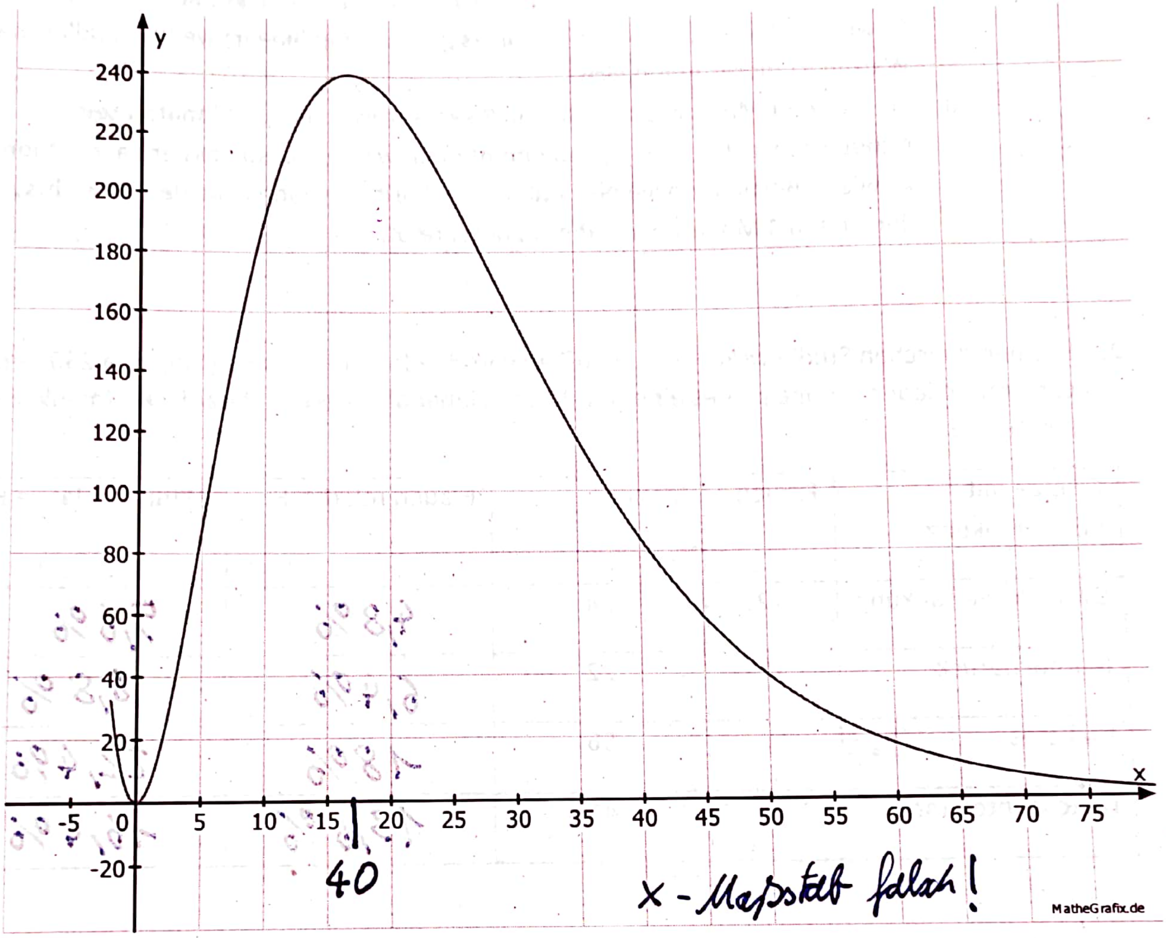
Mit 62,12 % findet man mindestens 3 Brillenträger

d) Zwischen 3 und 7 Personen

$$P(3\le X\le 7) = 1-P(X\le 2) - (1-P(X\le 8)) = 0{,}6212 - (\overset{0{,}0032}{1-0{,}9968}) = 0{,}6180$$

Mathematik BK2
Übungsarbeit

3. In einem Dorf wurden die Anwohner von einer Grippeinfektionswelle erfasst. Die Anzahl der akut Erkrankten ließ sich dabei annähernd durch die Funktion $f(x) = 6{,}4 \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}05 \cdot x}, x \geq 0$ beschreiben, wobei $f(x)$ die Anzahl der Erkrankten und x die Zeit ab dem Beginn der Epedemie in Tagen darstellt. Die Abbildung zeigt das Schaubild von $f(x)$.



a. Wann hat die Epidemie ihren Höhepunkt erreicht und wie viele Personen waren dabei erkrankt? *(26 Punkte)*

b. Wie hoch waren die maximale Ansteckungs- und Genesungsgeschwindigkeiten pro Tag und zu welchen Zeitpunkten war das? Auf die Prüfung der hinreichenden Bedingung kann hier verzichtet werden. *(14 Punkte)*

Gruppe mit Vorerkrankung	Frauen	Männer	Frauen relative H.	Männer relative H.
Ohne Vorerkrankung	12	14	4,8%	5,6%
Bluthochdruck	16	22	6,4%	8,8%
Diabetes	45	56	18%	22,4%
Lactose Intoleranz	34	41	13,6%	16,4%

Lösung Übungsarbeit BK2 vom 23.3.22

1. a) $f(0) = 100$ $f(3) = 95{,}2$

b) Ableitungen:

$f'(x) = 0{,}3x^2 - 2{,}5$

$f''(x) = 0{,}6x$

niedrigstes Gewicht: notw. Bed. $f'(x)=0$

$0{,}3x^2 - 2{,}5 = 0 \quad |:0{,}3$

$x^2 - 8{,}\overline{3} = 0 \quad |+8{,}\overline{3}; \pm\sqrt{\ }$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{8{,}\overline{3}} = \pm 2{,}887$

$x = 2{,}887$, da $x \geq 0$

Prüfung HP/TP:

$f''(x) = 0{,}6 \cdot 2{,}887 > 0 \Rightarrow$ TP Minimum

Das niedrigste Gewicht hat er nach 2,89 Monaten.

c)

linearer Fall: Steigung ist $f'(0) = -2{,}5$

$0 = 100 - 2{,}5 \cdot x \quad |+2{,}5x$

$2{,}5x = 100 \quad |:2{,}5$

$x = 40$

Nach 40 Monaten. Das würde nicht gehen, da er irgendwann lebensbedrohlich wenig wiegen würde.

d) Ansatz $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$h(0) = 95 \Rightarrow d = 95$

$h(3) = 80$

$a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + 95 = 80 \quad |-95$

1. $27a + 9b + 3c = -15$

$h'(3) = 0$

$3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c = 0$

3. $27a + 6b + c = 0$

$h(4) = 85$

$a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + 95 = 85 \quad |-95$

2. $64a + 16b + 4c = -10$

Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & -15 \\ 64 & 16 & 4 & -10 \\ 27 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot 4 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & -15 \\ 64 & 16 & 4 & -10 \\ 108 & 24 & 4 & 0 \end{array}\right) -$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & -15 \\ 64 & 16 & 4 & -10 \\ 44 & 8 & 0 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot 4 \\ \cdot 3 \\ \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 108 & 36 & 12 & -60 \\ 192 & 48 & 12 & -30 \\ 44 & 8 & 0 & 10 \end{array}\right) -$$

②

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 108 & 36 & 12 & -60 \\ 84 & 12 & 0 & 30 \\ 44 & 8 & 0 & 10 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 4 \\ \cdot 6 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 108 & 36 & 12 & -60 \\ 336 & 48 & 0 & 120 \\ 264 & 48 & 0 & 60 \end{array}\right) -$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 108 & 36 & 12 & -60 \\ 336 & 48 & 0 & 120 \\ 72 & 0 & 0 & 60 \end{array}\right)$$

$72a = 60$

$a = \frac{5}{6}$

$336 \cdot \frac{5}{6} + 48b = 120$

$280 + 48b = 120 \quad | -280$

$48b = -160 \quad | :(-160)$

$b = -\frac{10}{3}$

$108 \cdot \frac{5}{6} + 36 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) + 12c = -60$

$-30 + 12c = -60 \quad | +30$

$12c = -30 \quad | :12$

$c = -\frac{5}{2}$

$h(x) = \frac{5}{6}x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{5}{2}x + 95$

③

Lösungen Übungsarbeit BK2

2 a) siehe Blatt   b) Männer mit Bluthochdruck

c) $h = \frac{5{,}6 \cdot 400}{100} \approx 22{,}4$ 22 bis 23 sind zu erwarten. (22 geht auch)

d) $h = \frac{12+14+16+22+45+56+34+41}{8 \cdot 250} = \frac{240}{2000} = 0{,}12$

Der Anteil beträgt 12%.

e) Binomialdichte: $n=14$ $k=4$ $p=0{,}25$

$P(X=4) = \binom{14}{4} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^{10} = 0{,}2202$

Mit 22,02% Wsch. sind 4 dabei

f) i) $P(X \leq 3) = 0{,}5213$ (kumulative Bin. Vert) Taschenrechner!
$k=3$ $n=14$ $p=0{,}25$

ii) $P(2 \leq X \leq 5) = \underbrace{1-P(X\leq 1)}_{\text{weniger als 2}} - \underbrace{(1-P(X\leq 5))}_{\text{alle ab 6 weg}}$

$= 1-0{,}10097 - (1-0{,}88833)$

oder $= \underbrace{P(X\leq 5)}_{\text{höchstens 5}} - \underbrace{P(X\leq 1)}_{\text{weniger als 2}} = 0{,}88833 - 0{,}10097$
$= 0{,}7874$

g) Sigma-Regel: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = 3{,}87$

95,5%: $2\sigma = 7{,}75$ Es müssen für 28 Personen Mittel beschafft werden.

Erwartungswert $\mu(x) = 80 \cdot 0{,}25 = 20$

$20 + 2\sigma \approx 28$

④

3) a) Ableitungen:

$$f(x) = 6{,}4x^2 \cdot e^{-0{,}05x}$$

$u = 6{,}4x^2 \qquad u' = 12{,}8x$

$v = e^{-0{,}05x} \qquad v' = -0{,}05\, e^{-0{,}05x}$

$$f'(x) = \left[6{,}4x^2 \cdot (-0{,}05) + 12{,}8x\right] e^{-0{,}05x}$$

$$= \left(-0{,}32x^2 + 12{,}8x\right) e^{-0{,}05x}$$

$u = -0{,}32x^2 + 12{,}8x \qquad u' = -0{,}64x + 12{,}8$

$v = e^{-0{,}05x} \qquad v' = -0{,}05 \cdot e^{-0{,}05x}$

$$f''(x) = \left[\left(-0{,}32x^2 + 12{,}8x\right) \cdot (-0{,}05) - 0{,}64x + 12{,}8\right] e^{-0{,}05x}$$

$$= \left(0{,}016x^2 - 0{,}64x - 0{,}64x + 12{,}8\right) e^{-0{,}05x}$$

$$= \left(0{,}016x^2 - 1{,}28x + 12{,}8\right) e^{-0{,}05x}$$

EP: notw.-Bed $f'(x) = 0$

$-0{,}32x^2 + 12{,}8x = 0 \quad$, da $e^{-0{,}05x} > 0$

$\underbrace{(-0{,}32x + 12{,}8)}_{} \cdot \underbrace{x}_{=0} = 0 \qquad x_1 = 0$

$-0{,}32x + 12{,}8 = 0 \quad | -12{,}8$

$-0{,}32x = -12{,}8 \quad | : (-0{,}32)$

$x = 40$

(5)

Prüfung HP/TP

$f''(0) = 12,8 > 0$ TP $\quad f''(40) = -1,73 < 0 \Rightarrow$ HP

Y-Wert: $f(40) = 1385,8$ Es waren 1386 Personen erkrankt

b) maximale Ansteckungsgeschw. notw. Bed.: $f''(x) = 0$ (Wendepunkt)

$0,016x^2 - 1,28x + 12,8 = 0$, da $e^{-0,05x} > 0 \quad | : 0,016$

$x^2 - 80x + 800 = 0 \quad | \; p = -80 \quad q = 800$

$x_{1/2} = 40 \pm \sqrt{40^2 - 800}$

$x_1 = 68,28$ Abfall ; $x_2 = 11,716$ Anstieg

Nach 11,7 Tagen war die Ansteckungsrate am höchsten.

Rate: $f'(11,716) = 59,03$

Pro Tag steckten sich 59 Personen an.